

<p><b>Μάθημα:</b> Εφαρμοσμένα Μαθηματικά</p> <p><b>Εισηγητής:</b> Δρ Ιωάννης Θ. Φαμέλης</p> <p style="text-align: center;"><b>ΘΕΜΑΤΑ Α</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Ακαδημαϊκό Έτος 2013-14</b> <b>Εξάμηνο Χειμερινό</b> <b>Εξεταστική Περίοδος</b></p> <p>Σημειώσεις : κλειστές Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες Ημ. εξέτασης: 4/02/2014 Απαντάτε 3 από τα 4 Θέματα.</p>
--	--

**Θέμα 1.** Η τρισδιάστατη εξίσωση Laplace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$  ικανοποιείται από χρονοανεξάρτητες θερμοκρασιακές κατανομές, βαρυτικά και ηλεκτροστατικά δυναμικά. Εξετάστε εάν η συνάρτηση  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  την ικανοποιεί και στη συνέχεια υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης (ανάδελτα) της συνάρτησης στο σημείο (1,1,1).

**Θέμα 2.** Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα  $\iint_R \frac{xy}{4} dA$  όπου R η περιοχή του πρώτου τεταρτημόριου του επιπέδου που περικλείεται από την ευθεία  $x + y = 4$  και τους άξονες  $x = 0, y = 0$ . (Υπόδειξη: Σχεδιάστε το χωρίο και στη συνέχεια ολοκληρώστε.)

**Θέμα 3.** Έστω η περιοδική συνάρτηση παλμού  $f = f(x)$  όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -4 \leq x < -2 \\ 8, & -2 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

αν  $-4 \leq x < 4$  και  $f(x+8) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση και υπολογίστε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier που αντιστοιχούν σε αυτή. Γράψτε τους όρους αυτούς σε έναν πίνακα για  $n = -5..5$  και γράψτε την αντίστοιχη σειρά Fourier. Ποια είναι τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης  $f(x)$  τι τιμές παίρνει σε αυτά η σειρά Fourier;

**Θέμα 4.** Έστω ένα κύκλωμα RL το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης  $E = 20 \cos(2t)$  Volt, πηνίο αυτεπαγωγής  $L = 20$  Henry, ωμική αντίσταση  $R = 40$  Ohms και διακόπτη Δ. Η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή  $t=0$  είναι 0. Βρείτε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή  $t > 0$ .

Τα θέματα επιστρέφονται.

**Καλή επιτυχία**

**Ο Εισηγητής**

**Δρ Ι.Θ. Φαμέλης**  
**Αν. Καθηγητής**

<p><b>Μάθημα:</b> Εφαρμοσμένα Μαθηματικά</p> <p><b>Εισηγητής:</b> Δρ Ιωάννης Θ. Φαμέλης</p> <p style="text-align: center;"><b>ΘΕΜΑΤΑ Β</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Ακαδημαϊκό Έτος 2013-14</b> <b>Εξάμηνο Χειμερινό</b> <b>Εξεταστική Περίοδος</b></p> <p>Σημειώσεις : κλειστές Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες Ημ. εξέτασης: 4/02/2014 Απαντάτε 3 από τα 4 Θέματα.</p>
--	--

**Θέμα 1.** Η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  περιγράφει κυματικές μορφές (π.χ. παλλόμενες χορδές, κυματικά φαινόμενα σε υγρό μέσο, περιοδικής μορφής σήματα). Το  $w$  είναι το ύψος του κύματος,  $x$  η χωρική μεταβλητή,  $t$  η χρονική μεταβλητή και  $c$  η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Αποδείξτε ότι η  $w(x,t) = a \cos(bx + bct) + e^{x+ct}$  την ικανοποιεί (όπου  $a, b$  ακέραιοι). Στη συνέχεια υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης (ανάδελτα) της συνάρτησης στο σημείο  $(0,0)$ .

**Θέμα 2.** Εξετάστε εάν το πεδίο

$$\mathbf{F} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

είναι συντηρητικό. Εάν είναι, σας δίνεται ότι η συνάρτηση δυναμικού του είναι η  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + C$ . Ποια σχέση τη συνδέει με το πεδίο; Στη συνέχεια υπολογίστε το έργο κατά μήκος κάθε καμπύλης  $C$  που συνδέει τα σημεία  $(3,4,0)$  και  $(0,3,4)$ .

**Θέμα 3.** Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο  $f(x) = 2|x|$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ .

Χαρακτηρίστε την ως άρτια ή περιττή, βρείτε την περίοδο της και αναπτύξτε την τριγωνομετρική σειρά Fourier της συνάρτησης στη βασική περίοδό της.

**Θέμα 4.** Έστω ένα κύκλωμα LC το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης  $E=144$  Volt σταθερή, πυκνωτή χωρητικότητας  $C=0.005$  Farad, πηνίο αυτεπαγωγής  $l=2$  Henry και διακόπτη  $\Delta$ . Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή  $t=0$  είναι 0. Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace βρείτε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή  $t$ .

Τα θέματα επιστρέφονται.

**Καλή επιτυχία**

**Ο Εισηγητής**

**Δρ Ι.Θ.Φαμέλης**  
**Αν. Καθηγητής**