Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ, ΣΤΕΦ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επίκουρος Καθηγητής Δρ Ι.Θ. Φαμέλης

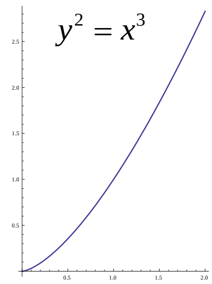
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΠΙΣΤΡΑΦΟΥΝ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:_________________
Α.Μ.: ____________

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011
ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

1. (β. 1.5) Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+\frac{3}{2}y^2+3x-y$ η οποία είναι ορισμένη στο τμήμα του επιπέδου για το οποίο $x\le 0$.

2. (β. 2) Βρείτε το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ στο P(4,1) για dx=0.01 και dy=-0.01. Με τη χρήση του ολικού διαφορικού να προσεγγιστεί η τιμή της συνάρτησης στο P1(4.01,0.99).



3. (β. 2) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_R (x+y)\,dA$ όπου *R* είναι το κλειστό χωρίο του πρώτου τεταρτημόριου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x$ και $y^2=x^3$.

4. (β 1.5) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $F(x,y,z)=\left(3x^2+6y\right)\mathbf{i}-14yz\mathbf{j}-20xz^2\mathbf{k}$ επί της καμπύλης $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k},\ 0\le t\le 1$ από το σημείο (0,0,0) στο σημείο (1,1,1). Παρατήρηση: Θα πρέπει να αποδείξετε ότι η καμπύλη είναι λεία.

5. (β. 2.5) Έστω ένα κύκλωμα LC το οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης $E=50\cdot t$ *Volt* , πυκνωτή χωρητικότητας *C=0.02 Farad*, πηνίο αυτεπαγωγής 0.5 *Herny* και διακόπτη *Δ*. Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t=0 είναι 0. Με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace βρείτε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή *t*.

6. (β. 2.5) Έστω η περιοδική συνάρτηση $f=f(x)$ όπου

$$f(x)=\begin{cases} 2, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ -2 & 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

αν $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$ και $f(x+\pi)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση και εξετάστε εάν είναι άρτια ή περιττή. Υπολογίστε τους συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς Fourier που αντιστοιχούν σε αυτή και γράψτε την αντίστοιχη σειρά Fourier. Στη συνέχεια να επαναπροσδιοριστεί στα σημεία ασυνέχειας η f ώστε η σειρά Fourier να την παριστάνει σε όλο το $\mathbb{R}$.

Καλή Επιτυχία ☺

Δρ. Ιωάννης Θ. Φαμέλης

31/1/2011

Συναρτήσεις

Άρτια συνάρτηση $f(-x)=f(x)$

Περιττή Συνάρτηση $f(-x)=-f(x)$

Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ είναι

$$\left(f(g(x))\right)'=\frac{df(g(x))}{dx}=f'(g(x))g'(x)=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$c'=0,\ c\in\mathbb{R}$ $\quad (x)'=1 \quad (x^k)'=kx^{k-1}, k\in\mathbb{R}$

$(e^x)'=e^x \quad (\ln(x))'=\frac{1}{x} \quad (\sin(x))'=\cos(x)$

$(\cos(x))'=-\sin(x) \quad (\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\log_a(x))=\frac{1}{x\ln(a)} \quad (\cot(x))'=-\frac{1}{\sin^2(x)}$

$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (a^x)'=\ln(a)\cdot a^x$

$(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan(x))'=\frac{1}{x^2+1}$

- $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

- $\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+c$
- $\int kdx=kx+c$ • $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c, \quad a\in\mathbb{R}-\{-1\}$
- $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ • $\int\cos x\,dx=\sin x+c$
- $\int\sin x dx=-\cos x+c$ • $\int e^x dx=e^x+c$

$\int\frac{adx}{x^2+a^2}=arc\tan(\frac{x}{a})+c \quad \int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\sin(\frac{x}{a})+c \quad \int\frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+c$

$\int\frac{1}{\sin^2(x)}dx=-\cot(x)+c$

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x\in\mathbb{R}$

$\sin(x)=-\sin(-x), \quad \cos(x)=\cos(-x)$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\cdot\tan y}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin(0)=\cos(\pi/2)=0, \quad \cos(0)=\sin(\pi/2)=1$

$\sin(\pi/6)=\cos(\pi/3)=1/2$,

$\sin(\pi/3)=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$

$\cos(n\pi)=(-1)^n=\begin{cases}1 & n=2k\\ -1 & n=2k+1\end{cases}$

$$\cos(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{n=4k+1}\\ -1 & \boldsymbol{n=4k}+2\\ 0 & \boldsymbol{n=4k}+3\\ 1 & \boldsymbol{n=4k}+4\end{cases}$$

$$\sin(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$

$\arcsin(\sin(x))=x \quad \arccos(\cos(x))=x$

$\arctan(\tan(x))=x \quad arc\cot(\cot(x))=x$

Τυπολόγιο Μετασχηματισμών Laplace

$L\{f(t)\}(s)=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

$L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad L\{1\}=\frac{1}{s} \quad L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$

$L\{\cos(at)\}=\frac{s}{s^2+a^2} \quad L\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$

$L\{\cosh(at)\}=\frac{s}{s^2-a^2} \quad L\{\sinh(at)\}=\frac{a}{s^2-a^2}$

$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$

$L\{e^{at}f(t)\}=L\{f(t)\}\big|_{s=s-a}=F(s)\big|_{s=s-a}=F(s-a)$

$L\{u(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}=e^{-as}F(s)$

$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F(s)\big|_{s\to\frac{s}{a}} \quad L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$

$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$

$L\{\int_0^t f(u)du\}=\frac{L\{f(t)\}}{s}=\frac{F(s)}{s}$

$L\{t^\nu f(t)\}=(-1)^\nu\left(L\{f(t)\}\right)^{(\nu)}=(-1)^\nu F(s)^{(\nu)}$

$L\{f(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$ **Για περιοδικές συναρτήσεις**

Συνέλιξη $(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$

$L\{(f*g)(t)\}=L\{f(t)\}\cdot L\{g(t)\}=F(s)\cdot G(s)$

$L\{\delta(t-\alpha)\}=e^{-as} \quad L^{-1}\{e^{-as}\}=\delta(t-\alpha)$

$L\{f(t)\delta(t-a)\}=f(a)e^{-as}$

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}=\frac{A}{(s+a)}+\frac{B}{(s+b)}+\frac{C}{(s+c)}$$

$$\frac{\kappa x^2+\lambda x+\mu}{(x+a)(x^2+bx+c)}=\frac{A}{x+a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

όταν $b^2-4ac<0$

$$\frac{1}{(s+a)^2(s+c)}=\frac{A}{(s+a)}+\frac{B}{(s+a)^2}+\frac{C}{(s+c)}$$

$$E=\frac{Q}{C}+l\frac{di}{dt}+R\cdot i$$

Τυπολόγιο Σειρών Fourier

Τριγωνομετρική σειρά:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+b_n\sin(\frac{2\pi nx}{T})]$$

$a_0=\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx \quad a_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\cos(\frac{2\pi nx}{T})dx$

$b_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx$

Εκθετική σειρά: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx, \quad n=0,\pm1,\pm2,....$$

$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi \quad e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$

Διανυσματικές συναρτήσεις

Η διανυσματική συνάρτηση είναι διαφορίσιμη εφόσον είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Η καμπύλη που διατρέχεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ είναι **λεία** (δηλαδή δεν εμφανίζει γωνιές) αν η παράγωγος $v=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ είναι παντού συνεχής και διάφορη του μηδενικού διανύσματος (μη μηδενικό μέτρο)

Συναρτήσεις πολλών Μεταβλητών

$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$ αν x συν. μόνο του t

$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$ αν x συν. του r,s

Κλίση $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$

Παράγωγος της $f(x,y)$ **στο** $P_0(x_0,y_0)$ **στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος** $u=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}$ **:** $(D_u f)\big|_{P_0}=\nabla f\big|_{P_0}\cdot\boldsymbol{u}$

$df=(D_u f)\big|_{P_0}ds=\left(\nabla f\big|_{P_0}\cdot\boldsymbol{u}\right)ds$

Γραμμικοποίση:

$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

Ολικό διαφορικό: $df=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$

Taylor

$$f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+(hf_x+kf_y)\big|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})\big|_{(a,b)}$$
$$+\frac{1}{3!}(h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy})\big|_{(a,b)}+\ldots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f\Big|_{(a,b)}$$

Ακρότατα $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ Αν στο (a,b)

- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}>0$ και $f_{xx}<0$ τότε **τοπικό μέγιστο**
- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}>0$ και $f_{xx}>0$ τότε **τοπικό ελάχιστο**
- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}<0$ τότε **σαγματικό σημείο**
- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}=0$ δεν **μπορούμε να αποφανθούμε**

Επικαμπύλιο επί λείας καμπύλης:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt$$

διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε περιοχή του χώρου

F$(x,y,z)=M(x,y,z)$**i**$+N(x,y,z)$**j**$+P(x,y,z)$**k**

Στροβιλισμός $curlF=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}$

Τελεστής Laplace $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Απόκλιση $divF=\nabla\cdot F=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$

Έργο επί λείας καμπύλης

$$W=\int_{t=a}^{t=b}F\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=a}^{t=b}F\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_A^B Mdx+Ndy+Pdz$$

f **συνάρτηση δυναμικού** του πεδίου **F:** $\boldsymbol{F}=\nabla f$

Το πεδίο **F συντηρητικό**

- αν και μόνο αν το πεδίο είναι αστρόβιλο
- αν και μόνο αν $\oint_C F\bullet d\boldsymbol{r}=0$
- αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού

Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων:

$x=r\cdot\cos(\theta) \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=r\cdot\sin(\theta) \quad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$