Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ, ΣΤΕΦ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επίκουρος Καθηγητής Δρ Ι.Θ. Φαμέλης

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΠΙΣΤΡΑΦΟΥΝ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:_________________
Α.Μ.: ____________

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

Α1. Αφού γράψετε τον μιγαδικό αριθμό $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ στην τριγωνομετρική του μορφή υπολογίστε το z^{12}.

Α2. Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss (επαυξημένου πίνακα).

$$2x-2y=14$$
$$x+y+z=5$$
$$-4x=-8$$

Η λύση με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο δεν γίνεται δεκτή.

Α3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, δείξτε ότι

$$\begin{pmatrix}-2 & -9\\ 1 & 4\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1-3n & -9n\\ n & 1+3n\end{pmatrix}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. (Μαθηματική επαγωγή: Δείχνω ότι ισχύει η σχέση για n=1, αποδέχομαι ότι ισχύει για n και με βάση αυτά δείχνω ότι ισχύει για n+1.)

Α4. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών αποδείξτε ότι η ορίζουσα $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11\\ 5 & 7 & 9 & 11 & 13\\ 7 & 9 & 11 & 13 & 15\\ 25 & 2 & 3 & -5 & 6\end{vmatrix}$ έχει τιμή 0.

Β1. Σε ηλεκτρικό κύκλωμα με αντίσταση η τάση *V* (σε Volt), το ρεύμα *I* (σε Ampere), και η αντίσταση *R* (σε Ohm) συνδέονται από τη σχέση *V=IR*. Έστω ότι το *V* αυξάνεται με ρυθμό 1.5 *V/sec* ενώ το *R* μειώνεται κατά *0.2 Ohm/sec.* Έστω επίσης *t* ο χρόνος. Ποια η τιμή του *dV/dt* και ποια του *dR/dt*; Ποια σχέση συνδέει του ρυθμούς *dV/dt ,dI/dt* και *dR/dt*; Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του *I* όταν *V=10 Volt* και *R=2 Ohm.* Αυξάνεται ή μειώνεται το *I;*

Β2. Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_3^4\frac{5x^2+14x-8}{x^3-4x}dx.$

Γ1. Έστω ότι τώρα το κύκλωμα οποίο αποτελείται από μία πηγή ηλεκτρεργετικής δύναμης *E (Volt)*, η οποία είναι σταθερή *E=300 Volt,* πηνίο αυτεπαγωγής *l=2 (Herny)*, ωμική αντίσταση *R=10 (Ohm)* και διακόπτη *Δ*, συνδεδεμένα σε σειρά. Τη χρονική στιγμή *t=0* , δεν διαπερνά ρεύμα το κύκλωμα (δηλαδή *i(0)=0),* ο διακόπτης κλείνει και ζητείται να προσδιοριστεί η τιμή του ρεύματος *i=i(t)* που αρχίζει να διαρρέει στο κύκλωμα. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο (των τάσεων) του Kirchoff, ο οποίος μας λέει ότι η ηλεκτρεργετική δύναμη ισοφαρίζει κάθε χρονική στιγμή την πτώση τάσης στο πηνίο $l\frac{di}{dt}$ και την πτώση τάσης στην αντίσταση iR, ισχύει $l\frac{di}{dt}+iR=E.$

Λύνοντας τη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών υπολογίστε το $i(t)$ για το συγκεκριμένο κύκλωμα. Χρησιμοποιήστε την αρχική συνθήκη της έντασης του ρεύματος για να καθορίσετε την τιμή της σταθεράς ολοκλήρωσης.

Γ2. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)=te^t\mathbf{i}+\frac{t+2}{t^2-6t+10}\mathbf{j}$. Υπολογίστε την παράγωγό της $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ και το ορισμένο ολοκλήρωμά $\int_1^2\mathbf{r}(t)dt$.

Να απαντήσετε 3 από τα θέματα Α1-Α4 (x1.5 μονάδες), 1 από τα θέματα Β1-Β2 (x2.5 μονάδες) και 1 από τα θέματα Γ1-Γ2 (x3 μονάδες).

Καλή Επιτυχία ☺ Δρ. Ιωάννης Θ. Φαμέλης 2/2/2011

Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις:

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$

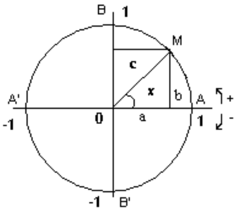
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3a^2b \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n = 1,2,3,\ldots$

$(1+a)^n \geq 1 + na, \quad a > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x \in \mathbb{R}$



$\sin(x) = \dfrac{b}{c}$ **,** $\cos(x) = \dfrac{a}{c}$ **,** $\tan(x) = \dfrac{b}{a}$ **,** $\cot(x) = \dfrac{a}{b}$

$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \cos(x) = \cos(-x)$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

$\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\cdot\tan(y)}$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = \dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$

$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}, \quad 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x \mp y}{2}\right)$

$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0, \quad \cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$

$\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$,

$\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

1 ακτίνιο = $180^o/\pi$ $\qquad$ $1^o = \pi/180$ ακτίνια

Σύνολο μιγαδικών $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

✓ Συζυγής: $\bar{z} = x - iy$

✓ Αντίστροφος: $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

✓ Μέτρο μιγαδικού αριθμού:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $r^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

✓ Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, όπου θ *πρωτεύον όρισμα.*

✓ Θεώρημα De Moivre

$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$, n ακέραιος ✓ Οι n διακεκριμένες **ρίζες** της εξίσωσης $x^n = z$, $n \in \mathbb{N}$, (που λέγονται και n-οστές ρίζες του z), δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \; k = 0,1,\ldots n-1$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το γινόμενο **πίνακα A** $m \times n$ **επί πίνακα B** $n \times k$ είναι πίνακας $m \times k$ το (i, j)- στοιχείο προκύπτει από το γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα A επί της j-στήλης του πίνακα B:

$$C = AB \Rightarrow [c_{ij}] = \left[\sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \\ b_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1,n}b_{n,1} \\ a_{21}b_{11} + \ldots + a_{2,n}b_{n,1} \\ \vdots \\ a_{m-1,1}b_{11} + \ldots + a_{m-1,n}b_{n,1} \\ a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mn}b_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m-1,i}b_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m,i}b_{i1} \end{bmatrix}$$

Ο **ανάστροφος** πίνακας του $A = [a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T = [a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

Ιδιότητες: • $(A^T)^T = A$ $\qquad$ • $(A+B)^T = A^T + B^T$

• $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad$ • $(AB)^T = B^T A^T$

Ο **αντίστροφος** ενός τετραγωνικού πίνακα $A = [a_{ij}]$ συμβολίζεται με A^{-1}.

Ιδιότητες αντίστροφων πινάκων:

• $(A^{-1})^{-1} = A$ $\qquad$ • $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

• $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\qquad$ • $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A = [a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου ij (ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη από τον *A*).

Ιδιότητες ορίζουσας του $n \times n$ πίνακα A:

• Αν A έχει μία γραμμή ή (στήλη) με μηδενικά μόνο στοιχεία τότε det(A)=0.

• Αν A έχει δύο γραμμές ή (στήλες) ίδιες ή ανάλογες (δηλαδή ένα προς ένα τα στοιχεία της μίας προς τα στοιχεία της άλλης δίνουν ως πηλίκο τον ίδιο αριθμό ή ισοδύναμα η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης) τότε det(A)=0.

• Αν ανταλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές γραμμές (ή διαδοχικές στήλες) ενός πίνακα A τότε ο πίνακας B που θα προκύψει έχει ορίζουσα det(B)= -det(A).

• Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή (ή στήλη) πίνακα A με αριθμό κ τότε για τον πίνακα B που θα προκύψει ισχύει det(B)= κ det(A).

• Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε το πολλαπλάσιο μίας γραμμής (ή μίας στήλης) ενός πίνακα A σε μία άλλη μία γραμμή (ή μία στήλη) του πίνακα A τότε για τον πίνακα B που θα προκύψει ισχύει det(B)=det(A).

• $\det(A^T) = \det(A)$, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

• $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

• $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ $\quad$ • $\det(A^k) = [\det(A)]^k$

• $\exists \; A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ και $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$

όπου $adj(A)$ ο ανάστροφος του πίνακα αλγεβρικών συμπληρωμάτων ($adj(A) = \left[A_{ij}\right]^T = \left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]^T$).

Καμπύλες

Το *(x,y)* ως προς ορθογώνιο σύστημα *xOy* με κέντρο το *O(0,0)* έχει συντεταγμένες *(X,Y)*= *(x-x₀,y- y₀)* ως προς σύστημα με κέντρο *K(x₀,y₀)*. Μία καμπύλη *(L)* με εξίσωση *f(x,y)=0* ως προς το ορθογώνιο σύστημα *xOy* με κέντρο το *O(0,0)* τότε ως προς σύστημα με κέντρο *K(x₀,y₀)* θα έχει εξίσωση *f(x₀+X, y₀+Y)=0.*

Σημείο *M(x,y)* ως προς ορθογώνιο σύστημα *xOy* με κέντρο το *O(0,0),* ως προς σύστημα με ίδιο κέντρο του οποίου οι άξονες έχουν στραφεί κατά γωνία ϑ *(αριστερόστροφα)* θα έχει συντεταγμένες *M (X,Y)*

$$\begin{cases} X = x\cos(\vartheta) + y\sin(\vartheta) \\ Y = -x\sin(\vartheta) + y\cos(\vartheta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X\cos(\vartheta) - Y\sin(\vartheta) \\ y = X\sin(\vartheta) + Y\cos(\vartheta) \end{cases}$$

Ευθεία $y = y_1 + \lambda(x - x_1)$ **,** $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Παραμετρικές εξισώσεις $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$

Κύκλος με κέντρο το (x_0, y_0)

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Εφαπτομένη στο (x_1, y_1)

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2$$

Κύκλος που περνά από 3 σημεία

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παραβολή με κορυφή (x_0, y_0)**,**

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ ή $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

Εφαπτομένη $yy_1 = 2p(x + x_1)$

Έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \; a > b, \; b^2 = a^2 - \gamma^2, \; \varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Εφαπτομένη $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$

Παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1, \; \left(\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} \text{ ή } \dfrac{\gamma}{b}\right)$ ή $y = \dfrac{c}{x}$

Εφαπτομένη $\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$

Υπερβολικές συναρτήσεις

$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές

$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\arctan(\tan(x)) = x \quad \operatorname{arc}\cot(\cot(x)) = x$

Συναρτήσεις

Άρτια συνάρτηση $\quad f(-x) = f(x)$

Περιττή Συνάρτηση $\quad f(-x) = -f(x)$

Περιοδική Συνάρτηση $\quad f(x+T) = f(x)$

Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

• Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής

• Αν f όχι συνεχής $\Rightarrow$ f όχι παραγωγίσιμη.

Ιδιότητες παραγώγων

• $(cf(x))' = c(f(x))', \quad c \in \mathbb{R}$

• $(f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'$

• $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

• $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \; g(x) \neq 0$

• Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}, \quad f' \neq 0 \text{ ή } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

• Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$

$$(f(g(x)))' = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$c'=0,\ c\in\mathbb{R}$ $\quad (x)'=1 \quad (x^k)'=k\,x^{k-1}, k\in\mathbb{R}$

$(e^x)'=e^x \quad (\ln(x))'=\frac{1}{x} \quad (\sin(x))'=\cos(x)$

$(\cos(x))'=-\sin(x) \quad (\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\log_a(x))=\frac{1}{x\ln(a)} \quad (\cot(x))'=-\frac{1}{\sin^2(x)}$

$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (a^x)'=\ln(a)\cdot a^x$

$(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan(x))'=\frac{1}{x^2+1}$

Η παράγωγος ως κλίση εφαπτομένης

Η εφαπτομένη ευθεία της $y=f(x)$ στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Η παράγωγος είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής.

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$

- Αν $f'(x)>0,\ \forall x\in I\subseteq A$, η f γνησίως αύξουσα.
- Αν $f'(x)<0,\ \forall x\in I\subseteq A$, η f γνησίως φθίνουσα.
- Αν $f'(x_0)=0$, για $x_0\in A$ με $f'(x)>0$, $\forall\ x<x_0$ και $f'(x)<0$, $\forall x>x_0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. (Ανάλογα για το ελάχιστο).
- Αν $f''(x)>0,\ \forall x\in I\subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.
- Αν $f''(x)<0,\ \forall x\in I\subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάνω.
- Αν $f''(x)>0$, $\forall\ x<x_0$ & $f''(x)<0$, $\forall x>x_0$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.

Αν $f'(x_0)=0$ & $f''(x_0)>0$, τότε x_0 τοπ. ελάχιστο

Αν $f'(x_0)=0$ & $f''(x_0)<0$, τότε x_0 τοπ. μεγίστου.

Γραμμικοποίηση στην περιοχή του c

$$f(x)\approx L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

Διαφορικό

Έστω y=f(x) διαφορίσιμη. Το διαφορικό dx είναι μία ανεξάρτητη μεταβλητή και το διαφορικό dy είναι μία εξαρτημένη (από το x και το dx) : $dy=f'(x)dx$

Αν το dx≠0 τότε: $\frac{\delta\iota\alpha\varphi o\rho\iota\kappa\acute{o}\ dy}{\delta\iota\alpha\varphi o\rho\iota\kappa\acute{o}\ dx}=f'(x)=\frac{dy}{dx}$

$d(cf)=cdf, c\in R \quad d(f\pm g)=df\pm dg$

$d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg \quad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}$

$d(f(g))=f'(g(x))dg=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$

Μεταβολή	Ακριβής τιμή	Προσέγγιση
Απόλυτη	$\Delta f=f(c+dx)-f(c)$	$df=f'(c)dx$
Σχετική	$\frac{\Delta f}{f(c)}$	$\frac{df}{f(c)}$
%	$\frac{\Delta f}{f(c)}\times 100$	$\frac{df}{f(c)}\times 100$

Σειρές Taylor: Αν η συνάρτηση f και $f^{(1)},f^{(2)},...,f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και αν η $f^{(n)}$ διαφορίσιμη στο (a,b), τότε για $\xi\in(a,x)$ ισχύει

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ το υπόλοιπο πολ. προσέγγισης n-βαθμού. Όταν $a=0$ ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθη αναπτύγματα Taylor

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος

$f(x)=\int g(x)dx\Leftrightarrow(f(x)+c)'=g(x)$

Ιδιότητες

$\int(c_1f(x)+c_2h(x))dx=c_1\int f(x)dx+c_2\int h(x)dx$

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+c$

Τυπολόγιο

- $\int kdx=kx+c$ • $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c,\quad a\in\mathbb{R}-\{-1\}$
- $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ • $\int\cos x\,dx=\sin x+c$
- $\int\sin xdx=-\cos x+c$ • $\int e^x dx=e^x+c$

$\int\frac{adx}{x^2+a^2}=arc\tan(\frac{x}{a})+c \quad \int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\sin(\frac{x}{a})+c \quad \int\frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+c$

$\int\frac{1}{\sin^2(x)}dx=-\cot(x)+c$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη
- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad \int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
- $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$
- ΘΜΤ f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi\in[a,b]$
$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Αν f συνεχής στο $[a,b]$, τότε

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α' είδους) $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

ή $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

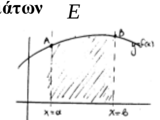
(β' είδους) $\int_a^{b^-}f(x)dx=\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$

(b ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^b f(x)dx=\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$ (a ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α', β' είδους

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων E



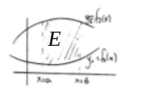
$E=\int_a^b f(x)dx,\quad f(x)\ge 0$

$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ (μήκος επίπεδης καμπυλης)

$E_{ox}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ (επιφάνεια από περιστροφή)

$V_{ox}=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$ (όγκος από περιστροφή)

$E=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$



$V_{ox}=\pi\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx$

Διάνυσματα θέσης

$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ κατεύθυνση

$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2) \quad \overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}$

$\boldsymbol{r_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j} \quad a\in\mathbb{R}$

$\boldsymbol{r_1}\pm\boldsymbol{r_2}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}\pm(y_1+y_2)\boldsymbol{j} \quad a\boldsymbol{r_1}=(ax_1)\boldsymbol{i}+(ay_1)\boldsymbol{j}$

Εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_2}=x_1x_2+y_1y_2=|\boldsymbol{r_1}||\boldsymbol{r_2}|\cos(\theta)$

$\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ είναι κάθετα (ορθογώνια) $\Leftrightarrow\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=0$

Διανυσματική προβολή u **στο** v $\quad proj_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}=\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\right)\boldsymbol{v}$

Αριθμητική συνιστώσα του $\boldsymbol{u}$ στη κατεύθυνση του $\boldsymbol{v}$

$$|\boldsymbol{u}|\cos(\theta)=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$$

Διανυσματικές συναρτήσεις $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$

Κύκλός $\boldsymbol{r}(t)=a\cos(t)\boldsymbol{i}+a\sin(t)\boldsymbol{j},\quad 0\le t\le 2\pi$

Ευθεία $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r_0}+t\boldsymbol{v},\quad -\infty\le t\le\infty$,

$x(t)=x_0+tv_1,\quad y(t)=y_0+tv_2,\quad -\infty\le t\le\infty$

$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{dx(t)}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy(t)}{dt}\boldsymbol{j}$

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\ne 0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$ εφαπτόμενο της καμπύλης.

$\boldsymbol{r}$ **λεία** αν $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ παντού συνεχής και $\ne 0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$

$\int_a^b\boldsymbol{r}(t)dt=\left(\int_a^b x(t)dt\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_a^b y(t)dt\right)\boldsymbol{j}$

Μήκος τόξου καμπύλης $L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων:

$x=r\cdot\cos(\theta) \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=r\cdot\sin(\theta) \quad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Εμβαδόν χωρίου που σαρώνει η ακτίνα $r=f(\theta)$,

$a\le\theta\le b$, είναι $A=\int_a^b\frac{1}{2}r^2d\theta$

Μήκος τόξου καμπύλης $L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$

Διαφορικές εξισώσεις

Χωριζομένων Μεταβλητών:

$M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$

Ομογενής πρώτης τάξης

$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)\overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow}\frac{du}{dx}x+u=F(u)\Leftrightarrow...\frac{dx}{x}+\frac{du}{u-F(u)}=0$

Γραμμική πρώτη τάξης $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$y(x)=\frac{1}{p(x)}\int p(x)Q(x)dx \qquad p(x)=e^{\int P(x)dx}$

Γραμμικές ομογενείς δ.ε. δευτέρης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+ar+b=0$

Δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους r_1,r_2. γενική λύση $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

Μία διπλή πραγματική ρίζα r_1 γενική λύση $y(x)=(C_1x+C_2)e^{r_1x}$

ένα ζεύγος μιγαδικών $r_1=a+bi$, $r_2=a-bi$, γενική λύση $y(x)=e^{ax}(C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx))$